Colle du 09/02 - Sujet 1
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en va de même pour $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^n - 1$, $S_n = nX^n - \sum_{k=0} X^k$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)\,X^n$.

1. Déterminer le quotient de P_n par $(X-1)$.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par $(X-1)$.
3. Vérifier que S_n est divisible par 1 puis en calculant de deux façons la dérivée de P_{n+1}, déterminer le quotient de S_n par $(X-1)$.
4. Conclure sur le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par $(X-1)^2$.

Colle du 09/02 - Sujet 2
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème sur les suites adjacentes.

Exercice 1. Déterminer la multiplicité de 1 dans $P = X^5 - X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$ puis factoriser P.

Exercice 2. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme la solution de l'équation $\ln(x) + x = n$. *On commencera par justifier que la suite est bien définie de façon unique.*

Colle du 09/02 - Sujet 3
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont racines distinctes de P, alors...

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^5 + aX^2 + bX$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles 1 est une racine multiple de P puis factoriser P.

Exercice 3. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}\left(4u_n^2 + \frac{1}{u_n}\right)$.